

2019年天津和平区高三一模理科数学试卷

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

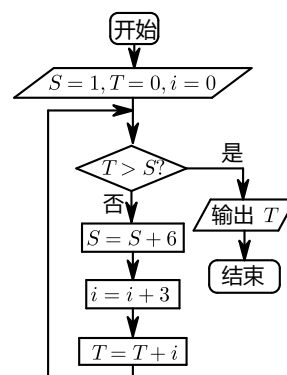
1. 已知集合 $M = \{0, 1, 2\}$, $N = \{x | -1 \leq x \leq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 () .

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$ C. $M \cap N = \{0, 1\}$ D. $M \cup N = N$

2. 设变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \leq 3 \\ 2x - y \leq 3 \end{cases}$, 则 $z = 2x + y$ 的最大值为 () .

- A. 1 B. 6 C. 5 D. 4

3. 执行如图所示的程序框图，则输出的结果为 () .



- A. 20 B. 30 C. 40 D. 50

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $a^2 = b^2 + c^2 - bc$, $bc = 4$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 () .

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2

5. 不等式 $x - \frac{1}{x} > 0$ 成立的充分不必要条件是 () .

- A. $x > 1$ B. $x > -1$ C. $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ D. $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$

6. 已知 $\log_2 a > \log_2 b$, 则不等式一定成立的是 () .

- A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\ln(a - b) > 0$ C. $2^{a-b} < 1$ D. $\left(\frac{1}{3}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

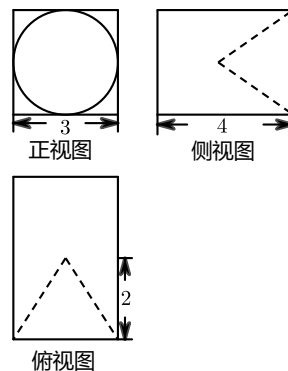
7. 设双曲线 $mx^2 + ny^2 = 1$ 的一个焦点与抛物线 $y = \frac{1}{8}x^2$ 的焦点相同, 离心率为 2, 则抛物线的焦点到双曲线的一条渐近线的距离为 () .

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

8. 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1 \\ |x^2 - 4| - 2, & x > 1 \end{cases}$, 若关于 x 的方程 $f(x) + m = g(x)$ 恰有三个不相等的实数解, 则 m 的取值范围是 ().
- A. $[0, \ln 2]$ B. $(-2 - \ln 2, 0)$ C. $(-2 - \ln 2, 0]$ D. $[0, 2 + \ln 2)$

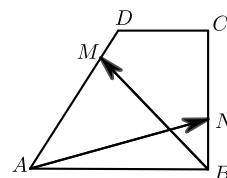
二、填空题 (本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

9. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 且复数 $\frac{a+2i}{1+i}$ 是纯虚数, 则 $a =$ _____.
10. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中 x^4 的系数为 _____. (用数字作答)
11. 已知一个几何体的三视图如右图所示 (单位: cm), 则该几何体的体积为 _____ cm^3 .



12. 在平面直角坐标系中, 以坐标原点为极点, x 轴的非负半轴为极轴且单位长度相同建立极坐标系, 若直线 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = a - t \end{cases}$ (t 为参数) 被曲线 $\rho = -4 \cos \theta$ 截得的弦长为 $2\sqrt{2}$, 则 a 的值为 _____.

13. 如图, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$, $AB = AD = 2$, 若 M 、 N 分别是边 AD 、 BC 上的动点, 满足 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BN} = (1 - \lambda) \overrightarrow{BC}$, 其中 $\lambda \in (0, 1)$, 若 $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = -2$, 则 λ 的值为 _____.



14. 已知 a, b 正数, 若直线 $2ax + by - 2 = 0$ 被圆 $x^2 + y^2 = 4$ 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a\sqrt{1 + 2b^2}$ 的最大值是 _____.

三、解答题（本大题共6小题，共80分）

15. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对边的长分别是 a, b, c , 且 $b = 3, c = 1, A = 2B$.

(1) 求 a 的值.

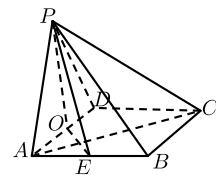
(2) 求 $\cos\left(2A + \frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. 点外卖现已成为上班族解决午餐问题的一种流行趋势, 某配餐店为扩大品牌影响力, 决定对新顾客实行让利促销, 规定: 凡点餐的新顾客均可获赠10元或者16元代金券一张, 中奖率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{1}{3}$, 每人限点一餐, 且100%中奖, 现有A公司甲、乙、丙、丁四位员工决定点餐试吃.

(1) 求这四人中至多一人抽到16元代金券的概率.

(2) 这四人中抽到10元、16元代金券的人数分别用 X, Y 表示, 记 $\xi = XY$, 求随机变量 ξ 的分布列和数学期望.

17. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是菱形, $PO \perp$ 底面 $ABCD$. O 、 E 分别是 AD 、 AB 的中点, $AB = 6$, $AP = 5$, $\angle BAD = 60^\circ$.



(1) 求证: $AC \perp PE$.

(2) 求直线 PB 与平面 POE 所成角的正弦值.

(3) 在 DC 边上是否存在点 F , 使 BF 与 PA 所成角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{3}}{10}$, 若存在, 确定点 F 位置; 若不存在, 说明理由.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 3n^2 + 8n$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $a_n = b_n + b_{n+1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 令 $c_n = \frac{(a_n + 1)^{n+1}}{(b_n + 2)^n}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $\left(1, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, 左、右焦点分别 F_1 、 F_2 , 椭圆的四个顶点围成的菱形面积为 $4\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设 Q 是椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点, O 为坐标原点, 过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆于 M 、 N 两个不同的点, 求 $\frac{|MN|}{|OQ|^2}$ 的值.

20. 设函数 $f(x) = xe^{kx} (k \neq 0)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程.

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

(3) 设 $g(x) = x^2 - 2bx + 4$, 当 $k = 1$ 时, 若对任意的 $x_1 \in \mathbf{R}$, 存在 $x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 求实数 b 的取值范围.